

УДК 551.58

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА СКОРОСТИ ВЕТРА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Е. П. Школьный, д-р техн. наук, проф.

*Одесский государственный экологический университет,
ул. Львовская, 15, 65016, Одесса, Украина, Eshcolny@gmail.com*

В статье путем функционального преобразования осуществляется переход от нормального закона распределения зональной и меридиональной компонент вектора скорости ветра к нормальному закону распределения ее модуля и полярного угла. Получены частные и условные распределения этих случайных величин. Они свидетельствуют о том, что при круговом рассеивании некоррелированных составляющих скорости ветра частное распределение модуля скорости ветра становится распределением Релея, а условные его распределения вырождаются в равномерное распределение. Исследованы случаи эллиптического рассеивания компонент скорости ветра при их коррелированности и при отсутствии корреляционной связи.

Ключевые слова: скорость ветра, плотность вероятностей, частные и условные распределения, дисперсия, критерий Фишера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее острых проблем современности являются изменения климата, наиболее ярко проявляющиеся в XXI веке. Меры по смягчению этих изменений закреплены Киотским протоколом к Рамочной Конвенции по изменению климата (1997 г.) и пришедшему ему на смену Парижскому договору (2015 г.), вступающему в силу с 2020 года.

Этими международными документами установлены меры по сокращению выбросов парниковых газов и, прежде всего, двуокиси углерода в атмосферу. Так, Украина поставила своими целями сокращение двуокиси углерода на 40 % до 2030 года и на 70 % (до 2050 года) по сравнению с уровнями выбросов 1990 года.

При условии развития украинской экономики, требующей роста производства энергии, достижение этих целей возможно лишь за счет резкой интенсификации использования альтернативных источников энергии, и в первую очередь, энергии солнца и ветра.

Эффективность внедрения в производство этих энергетических систем в большой мере определяется погодными и климатическими факторами. Для ветроэнергетических устройств (ВЭУ) наиболее важной характеристикой является режим ветра.

Как показано в работах [1, 2] энергетический спектр модуля горизонтальной составляющей ветра характеризуется тремя максимумами, которые приходятся соответственно на синоптический, суточный (мезомасштабный) и микромас-

штабный временные интервалы. В мезомасштабном временном интервале с периодами от минут до часов энергия колебаний относительно невелика.

Как следует из [1], частоты энергетического спектра синоптических и микромасштабных колебаний существенно различаются. Последние представляют собой изотропную мелкомасштабную турбулентность, которая описывается известным законом Колмогорова-Обухова [3, 4].

Особенности энергетического спектра турбулентных пульсаций скорости ветра в значительной степени связаны с задачами, которые решаются при организации сети ВЭУ, с одной стороны, и созданием самих систем, с другой. При конструировании ВЭУ установление размеров ветрового колеса, углов отклонения его лопастей относительно оси вращения, с чем связана мощность ВЭУ, разработке закона автоматического управления режимом работы ВЭУ и оптимизация его параметров осуществляются с учетом характеристик спектра микромасштабных турбулентных вихрей с временным масштабом от секунды до часа. В работах [5-7] приводятся параметры такого энергетического спектра, которые установлены по данным безинерционного ультразвукового анемометра.

Со спектром атмосферных движений синоптических масштабов связана совершенно другая задача. Она заключается в том, что связи с внедрением в практику ВЭУ, организацией систем ветроэнергетики возникает необходимость изу-

читать ветроэнергетический потенциал территории, где предполагается создание такой системы. Подобные исследования проведены, например, в России [8] и Грузии [9]. Такого рода мероприятия основаны на изучении вероятностных характеристик направления и модуля вектора скорости ветра. Фундаментальной работой в этом направлении является монография И. Г. Гутермана [10]. В ней основным постулатом является гипотеза о круговом нормальном распределении зональной u и меридиональной v составляющих вектора скорости ветра. Гипотеза о круговом нормальном распределении составляющих скорости ветра является исходной и в других работах [8, 9, 11], посвященных указанной проблеме. Как показывают исследования, гипотеза о нормальном распределении компонент вектора скорости ветра может быть принятой и в ряде районов территории Украины. Однако приближение кругового рассеивания не всегда является адекватным. Кроме того, с нашей точки зрения, для целей ветроэнергетики более приемлемой является не прямоугольная, а полярная система координат.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Будем считать составляющие скорости ветра центрированными величинами и введем обозначения $x = u - \bar{u}$, $y = v - \bar{v}$. Тогда плотность нормального распределения системы случайных величин (x, y) имеет вид

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}, \quad (1)$$

где σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения компонент скорости ветра в декартовых координатах, ρ – коэффициент корреляции между x и y .

При указанной замене переменных эллипс рассеивания на плоскости xOy имеет вид

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho xy}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1. \quad (2)$$

В этом случае центр эллипса находится в начале координат xOy , а оси его симметрии совпадают с направлением осей Ox и Oy . Свойства

нормального закона распределения системы случайных величин достаточно полно описаны в работах [12-16].

Представляется, что применительно к задачам ветроэнергетики интерес представляют вероятностные характеристики не проекции вектора ветра на оси системы прямоугольных координат, а его модуль и угол, определяющий направление вектора. Их вероятностные характеристики можно получить путем преобразования исходных координат (x, y) в полярные (r, α) . Такое преобразование координат является функциональным преобразованием одной системы координат в другую. Указанное функциональное преобразование осуществляется следующим образом [16].

Предположим, что система двух случайных величин $\{y_1, y_2\}$ является результатом функционального преобразования системы $\{x_1, x_2\}$, заданного функциями:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, x_2), \\ y_2 = y_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (3)$$

Пусть также существует обратное преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2), \\ x_2 = x_2(y_1, y_2). \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что преобразования (3) и (4) являются взаимно-однозначными, т.е. каждой точке (y_1, y_2) элементарной области dG_y на плоскости y_1Oy_2 соответствует одна определенная точка (x_1, x_2) элементарной области dG_x на плоскости x_1Ox_2 . Таким образом, имеем следующее соотношение вероятностей указанных событий

$$P\{[y_1, y_2] \subset dG_y\} = P\{[x_1, x_2] \subset dG_x\}. \quad (5)$$

В случае, когда система случайных величин $\{x_1, x_2\}$ имеет непрерывное распределение, то на основе соотношения (5) получим [16]

$$\varphi_y(y_1, y_2)dG_y = \varphi_x(x_1, x_2)dG_x, \quad (6)$$

где

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, y_2), \\ x_2 = x_2(y_1, y_2). \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда, плотность вероятностей $\varphi_y(y_1, y_2)$ определяется соотношением

$$\varphi_y(y_1, y_2) = \varphi_y\{x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)\} \frac{dG_x}{dG_y}. \quad (8)$$

Отношение элементарных площадей dG_y и dG_x равно модулю якобиана $|J|$ преобразования (4)

$$\frac{dG_x}{dG_y} = \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = |J|, \quad (9)$$

где

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1(y_1, y_2)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2(y_1, y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2(y_1, y_2)}{\partial y_2} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Решение поставленной задачи имеет вид

$$\varphi_y(y_1, y_2) = \varphi_y\{x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)\} |J|. \quad (11)$$

На основе изложенного выше рассмотрим функциональное преобразование прямоугольных координат в полярные. Пусть $\varphi(x, y)$ – плотность распределения системы случайных величин (x, y) на плоскости xOy . Определим плотность распределения системы (r, α) , где, как указывалось выше, r - радиус-вектор точки на плоскости, α - полярный угол. Очевидно,

$$\begin{cases} y = r \sin \alpha, \\ x = r \cos \alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда якобиан преобразования (12) равен

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \alpha)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{vmatrix} = r(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = r. \quad (13)$$

Используя общую формулу (11), приходим к следующему выражению

$$\begin{aligned} \varphi_2(r, \alpha) &= \varphi_1[x(r, \alpha); y(r, \alpha)] |J| = \\ &= r \varphi_1(r \cos \alpha, r \sin \alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Если система случайных величин $\{x, y\}$

имеет плотность распределения (1), то согласно выражению (14) получим

$$\begin{aligned} \varphi(r, \alpha) &= \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times e^{-\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho \sin \alpha \cos \alpha}{\sigma_x \sigma_y} \right)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Равенство (15) является плотностью совместного нормального распределения коррелируемых случайных величин (r, α) в полярных координатах.

Коэффициент корреляции между компонентами скорости ветра является важной характеристикой, поскольку от его значения зависит величина угла отклонения β большой полуоси эллипса от соответствующей оси системы xOy . Этот угол определяется соотношением

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\rho\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}. \quad (16)$$

Как известно [16], уравнению (16) удовлетворяют два угла β_1 и $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$, заключенные в интервале $(0, \pi)$.

Приведем уравнение (15) к более удобному для наших исследований виду. Как известно из тригонометрии:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \quad (17)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad (18)$$

Тогда

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_y^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} + \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \cos 2\alpha \right], \quad (19)$$

$$\frac{2\rho \cos \alpha \sin \alpha}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\rho \sin 2\alpha}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (20)$$

Введем обозначения:

$$a = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}, \quad (21)$$

$$b = \frac{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}, \quad (22)$$

$$c = \frac{\rho}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (23)$$

С учетом (21) – (23) нормальное распределение системы (r, α) случайных величин (15) приобретает вид

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha-c\sin 2\alpha)}. \quad (24)$$

Если случайные величины (r, α) независимы, то

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{r^2}{4}(a+b\cos 2\alpha)}. \quad (25)$$

Если, кроме того, рассеивание вектора скорости ветра является круговым, то, очевидно, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, а закон распределения (24) приобретает вид

$$\varphi(r, \alpha) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}. \quad (26)$$

3. ЧАСТНЫЕ И УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ВЕТРА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

С целью детального рассмотрения свойств компонент вектора скорости ветра (r, α) целесообразно использовать их частные и условные распределения.

Частным распределением называется распределение одной из случайных величин, входящих в систему [16]. Для того чтобы получить эти распределения, необходимо проинтегрировать совместное распределение $\varphi(r, \alpha)$ по области значений аргумента, соответствующего другой случайной величине:

$$\varphi_\alpha(r) = \int_\alpha \varphi(r, \alpha) d\alpha, \quad (27)$$

$$\varphi_r(\alpha) = \int_r \varphi(r, \alpha) dr. \quad (28)$$

Определение частного распределения $\varphi_r(\alpha)$ не составляет труда. Оно, очевидно, равно

$$\begin{aligned} \varphi_r(\alpha) &= \int_r \varphi(r, \alpha) dr = \int_0^r \frac{re^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha-c\sin 2\alpha)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} dr = \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi\sigma_x\sigma_y(a+b\cos 2\alpha-c\sin 2\alpha)} \times \\ &\times \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha-c\sin 2\alpha)} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

Частное распределение $\varphi_\alpha(r)$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(r) &= \int_\alpha \varphi(r, \alpha) d\alpha = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{re^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha-c\sin 2\alpha)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} d\alpha. \quad (30) \end{aligned}$$

Его можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(r) &= \int_\alpha \varphi(r, \alpha) d\alpha = \frac{re^{-\frac{ar^2}{4(1-\rho^2)}}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(b\cos 2\alpha-c\sin 2\alpha)} d\alpha. \quad (31) \end{aligned}$$

Значение интеграла в равенстве (31) не может быть представлено в квадратурах. Поэтому будем искать его приближенное значение. Прежде всего, заметим, что в соответствии с теоремой Лейбница степенной ряд функции $z = e^{-x}$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad (32)$$

является абсолютно сходящимся. Используем (32), вводя обозначение

$$x = -\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}[b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha]. \quad (33)$$

Оценки показывают, что при средних квадратических отклонениях составляющих вектора

ветра σ_x и σ_y , имеющих порядок нескольких м/с (для приземного ветра это условие выполняется) и при его модулях $0 < r < 20$ м/с, соотношение (33) имеет порядок $10^{-2} - 10^{-3}$, его квадрат $10^{-4} - 10^{-6}$, а третья степень $10^{-6} - 10^{-9}$. Поэтому подставив функцию (33) в ряд (32), ограничиваясь второй и третьей степенями, получим интеграл J в равенстве (31) в следующей форме

$$J = \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha)} d\alpha = \int_0^{2\pi} \left\{ 1 - \frac{r^2}{4(1-\rho^2)} \times (b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha) + \frac{r^4}{32(1-\rho^2)^2} (b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha)^2 \right\} d\alpha. \quad (34)$$

После выполнения операции интегрирования интеграл (34) приобретает следующий вид

$$J = \left[1 + \frac{r^4}{64(1-\rho^2)^2} (b^2 + c^2) \right] 2\pi, \quad (35)$$

а частное распределение (31) определяется соотношением

$$\varphi_\alpha(r) = \frac{re^{-\frac{ar^2}{4(1-\rho^2)}}}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \left[1 + \frac{r^4}{64(1-\rho^2)^2} (b^2 + c^2) \right]. \quad (36)$$

Если компоненты скорости ветра не коррелируемы ($\rho = 0, c = 0$), то получаем это частное распределение в виде

$$\varphi_\alpha(r) = \frac{re^{-\frac{ar^2}{4}}}{\sigma_x \sigma_y} \left[1 + \frac{r^4}{64} b^2 \right]. \quad (37)$$

Когда, кроме того, рассеивание скорости ветра является круговым ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma; b = 0$), то рассматриваемое частное распределение приобретает вид

$$\varphi_\alpha(r) = \frac{re^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2}. \quad (38)$$

Таким образом, при указанных ограничениях частное распределение $\varphi_\alpha(r)$ представляет собой закон Релея.

Последний результат является свидетельством того, что полученное частное распределение

(36) в принятой аппроксимации является вполне приемлемым.

С частными распределениями непосредственно связаны условные распределения вероятностей системы случайных величин (r, α)

$$\varphi(r/\alpha) = \frac{\varphi(r, \alpha)}{\int_0^r \varphi(r, \alpha) dr} = \frac{\varphi(r, \alpha)}{\varphi_r(\alpha)}, \quad (39)$$

$$\varphi(\alpha/r) = \frac{\varphi(r, \alpha)}{\int_0^{2\pi} \varphi(r, \alpha) d\alpha} = \frac{\varphi(r, \alpha)}{\varphi_\alpha(r)}. \quad (40)$$

Используя полученные плотности вероятностей (24), (29) и (36), получим:

$$\varphi(r/\alpha) = \frac{r[a + b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha]}{2(1-\rho^2) \left[1 - e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha)} \right]} \times e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha)}, \quad (41)$$

$$\varphi(\alpha/r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha)}}{2\pi e^{-\frac{ar^2}{4(1-\rho^2)}} \left[1 + \frac{r^4}{64(1-\rho^2)^2} (b^2 + c^2) \right]}. \quad (42)$$

Путем несложных преобразований плотность вероятности (41) можно привести к более простому виду

$$\varphi(r/\alpha) = \frac{r[a + b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha]}{2(1-\rho^2) \left[e^{\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a+b\cos 2\alpha - c\sin 2\alpha)} - 1 \right]}. \quad (43)$$

В частном случае, когда ($\rho = 0, c = 0$) имеем

$$\varphi(r/\alpha) = \frac{r[a + b\cos 2\alpha]}{2 \left[e^{\frac{r^2}{4}(a+b\cos 2\alpha)} - 1 \right]}. \quad (44)$$

Если, при этом, рассеивание является круговым ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma, b = 0$), то условная плотность вероятности (43) сводится к выражению

$$\varphi(r/\alpha) = \frac{r}{\sigma^2 \left[e^{\frac{r^2}{4}} - 1 \right]} \quad (45)$$

При сформулированных предположениях вид условной плотности вероятностей $\varphi(\alpha/r)$ также упрощается. В первом случае она становится равной

$$\varphi(\alpha/r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4}(a+b\cos 2\alpha)}}{2\pi e^{-\frac{ar^2}{4}} \left[1 + \frac{r^4}{64} b^2 \right]}, \quad (46)$$

а при круговом рассеивании вырождается в равномерное распределение

$$\varphi(\alpha/r) = \frac{1}{2\pi}, \quad (0 \leq r \leq \infty). \quad (47)$$

Полученные выше выражения плотностей вероятностей частных и условных распределений свидетельствуют о том, что при проведенном преобразовании декартовых координат в полярную систему (r, α) их совместное нормальное распределение расщепляется на систему плотностей вероятностей, которые нормальными не являются.

При условии коррелируемости системы случайных величин (x, y) эллипс их рассеяния поворачивается своей большой полуосью на угол β , определяемый равенством (16), направо от оси Ox , если ковариационный момент $K_{xy} = \sigma_x \sigma_y r_{xy} > 0$, и налево, если $K_{xy} = \sigma_x \sigma_y r_{xy} < 0$. В этом случае средние квадратические отклонения, содержащиеся в частных и условных распределениях, перед использованием условных вероятностей, необходимо пересчитать по следующим соотношениям [16]:

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \beta + \sigma_y^2 \sin^2 \beta + \sigma_x \sigma_y r_{xy} \sin 2\beta, \quad (48)$$

$$\sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \sin^2 \beta + \sigma_y^2 \cos^2 \beta - \sigma_x \sigma_y r_{xy} \sin 2\beta, \quad (49)$$

где $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ определяют большую и малую полуоси эллипса рассеивания после поворота его осей симметрии на угол β .

Полученные частные и условные распределения дают возможность рассчитать вероятности модуля скорости ветра r и полярного угла β при заданных условиях.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЕКТОРА СКОРОСТИ ПРИЗЕМНОГО ВЕТРА

Полученные выше модели распределения вероятностей компонент скорости ветра исходят из предположения о нормальном законе распределения системы случайных величин (r, α) , поскольку процедура преобразования прямоугольных координат (x, y) в полярные не изменяет закона распределения составляющих скорости ветра. Напомним, что выше были приняты обозначения: x - центрированное значение зональной, y - центрированное значение меридиональной компонент вектора скорости ветра. Если в прямоугольной системе координат параметрами нормального распределения являются дисперсии σ_x^2, σ_y^2 , а также коэффициент корреляции ρ , то у плотностей вероятности нормального распределения в полярных координатах параметрами являются полученные нами обобщенные величины a, b и c , определенные равенствами (21) – (23), которые непосредственно связаны с дисперсиями и коэффициентом корреляции.

Поэтому, прежде всего необходимо произвести оценку моментов на основе результатов измерений скорости ветра с помощью анеморумбометра. В качестве пунктов измерений выбраны АМСГ Одесса, Днепр и Львов. Статистические оценки первых четырех моментов составляющих скорости ветра содержатся в табл. 1. Расчёт статистических оценок моментов произведён А. Собченко.

В табл. 1 приняты обозначения: σ_x^2 – значение дисперсий зональной компоненты, $(\text{м/с})^2$; σ_y^2 – значение дисперсий меридиональной компоненты скорости ветра, $(\text{м/с})^2$; As – асимметрия; E – эксцесс; F – критерий Фишера. Как следует из табл. 1, различия между значениями дисперсий зональной и меридиональной компонент невелики. Значения критерия Фишера дают основание для принятия гипотезы о незначимости различий дисперсий σ_x^2, σ_y^2 в Одессе и Днепре, по крайней мере, на уровне значимости 0,01. Кроме того, корреляционная связь между зональной и меридиональной составляющими скорости ветра здесь отсутствует. Поэтому в этих пунктах, как первое приближение, применима модель кругового рассеивания. В пункте Львов такую модель использовать нельзя, по-

сколько там коэффициент корреляции является значимым. Как следует из табл. 1, коэффициенты асимметрии и эксцесса во всех пунктах близки к нулю. Таким образом, имеются основания прийти к заключению, что система (x, y) компонент скорости ветра имеет нормальное распределение – круговое в Одессе и эллиптическое во Львове. В системе полярных координат, как было показано выше, нормальное распределение компонент вектора скорости ветра (r, α) определяется соотношениями (15) и (24). Частные и условные распределения вероятностей (29), (36) и (41), (42) позволяют рассчитать различные комбинации вероятностей реализации модуля вектора скорости ветра и его направления.

Прежде всего, обратимся к анализу модели кругового нормального рассеивания в пункте Одесса. Очевидно, эллипс превращается в круг,

когда его полуоси равны. Как было отмечено выше, незначимость различий дисперсий позволяет определить осредненную дисперсию составляющих скорости ветра $\sigma^2 = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) / 2$ и соответствующие средние квадратические отклонения $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Для Одессы $\sigma^2 = 11,7 \text{ (м/с)}^2$ ($\sigma = 3,42 \text{ м/с}$). В этом случае частное распределение $\varphi_\alpha(r)$ (36) становится распределением Релея (38). На рис. 1 содержится плотность вероятности частного распределения $\varphi_\alpha(r)$, полученная с помощью равенства (38) для Одессы.

В табл. 2 содержатся вероятности того, что скорости ветра находятся в указанных границах для пунктов Одесса и Днепр.

Таблица 1 – Статистические оценки моментов составляющих скорости ветра

Пункты	Значение оценок									
	σ_x^2	σ_y^2	σ_x	σ_y	As_x	As_y	E_x	E_y	ρ	F
Одесса	14,83	8,54	3,85	2,92	-0,12	-0,02	-0,25	0,35	-0,05	1,72
Днепр	9,30	12,44	3,05	3,53	0,03	0,04	-0,02	0,12	-0,04	1,34
Львов	4,88	9,06	3,01	2,21	-0,19	0,06	0,66	0,23	0,29	1,04

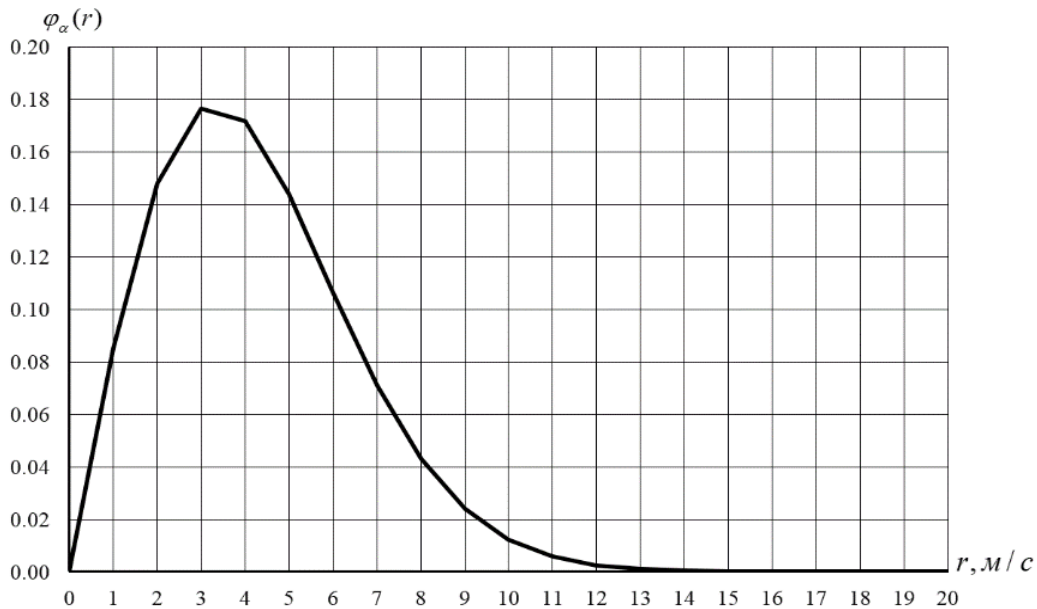


Рис. 1 – Частное распределение вероятностей $\varphi_\alpha(r)$. Одесса.

Таблица 2 – Вероятности модуля скорости ветра на промежутке $[r_i, r_j]$

Пункты	Интервалы модуля скорости ветра м/с					
	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	>10
Одесса	0,17	0,35	0,28	0,14	0,04	0,02
Днепр	0,17	0,34	0,28	0,13	0,04	0,04

Как известно, вероятность

$$P(r_i < r < r_j) = \int_{r_j}^{r_i} \varphi_a(r) dr.$$

Как следует из табл. 2, вероятности пребывания скорости ветра в указанных интервалах примерно одинаковы, что свидетельствует о том, что в указанных пунктах наблюдений режим ветра на климатических масштабах подобный.

Вернемся теперь к равенству (29). Из него следует, что при отсутствии корреляционной связи между случайными величинами системы (x, y) ($c = 0$) частное распределение $\varphi_r(\alpha)$ принимает вид

$$\varphi_r(\alpha) = \frac{1 - e^{-\frac{r^2}{4}(a+b\cos 2\alpha)}}{\pi\sigma_x\sigma_y(a+b\cos 2\alpha)}. \quad (50)$$

И, кроме того, при круговом рассеивании:

$$\left(\sigma_x = \sigma_y = \sigma, b = 0, a = \frac{2}{\sigma^2} \right),$$

$$\varphi_r(\alpha) = \frac{1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{2\pi}. \quad (51)$$

Равенство (51) представляет собой систему равномерных распределений $\varphi_r(\alpha) = \xi$ при значениях $0 < \xi < \frac{1}{2\pi}$, соответствующих определенным значениям модуля скорости ветра на интервале $0 < r < \infty$. Например, для Одессы ($\sigma^2 = 11,7 \text{ (м/с)}^2$) $\xi(\alpha) = 0,105$ при $r = 5 \text{ м/с}$.

Как следует из табл. 1, корреляционная связь в системе (x, y) случайных величин имеет место во Львове ($\rho = 0,29$). Поэтому при анализе частных распределений скорости ветра в этом пункте наблюдений будем использовать модель эллиптического рассеивания с коэффициентом корреляции, то есть равенства (29) и (36).

Поскольку корреляционная связь присутствует, то эллипс должен быть повернут относительно исходной системы координат на угол β , который определяется соотношением (16). Расчеты показывают, что для Львова $\beta = 22,6^\circ$. При повороте системы координат осуществляется проектирование полуосей σ_x и σ_y на оси новой си-

стемы $x'Oy'$. В результате величины полуосей изменяются в соответствии равенствам (48) – (49). Круговое рассеивание вектора скорости ветра является достаточно грубой аппроксимацией даже на климатических масштабах энергетического спектра.

Представляет интерес, насколько изменится структура плотностей условных распределений, если приняты условия эллиптического рассеивания как при наличии корреляционной связи между составляющими вектора скорости ветра, так и при ее отсутствии. На рис. 2 приводится график функции условных распределений $\varphi(\alpha/r)$, в качестве примера, для Одессы.

Прежде всего, обращает внимание тот факт, что при очень слабых ветрах ($r = 2 \text{ м/с}$) плотности условных вероятностей $\varphi(\alpha/r)$ испытывают незначительные колебания относительно плотности вероятностей равномерного распределения $\varphi(\alpha/r) = \frac{1}{2\pi} = const$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, т.е. как и

при условии кругового рассеивания с независимыми проекциями вектора скорости ветра. С увеличением скорости ветра, размах колебаний существенно возрастает, особенно в пунктах со сложными условиями рельефа (Одесса, Львов).

Представляет интерес тот факт, что если ранее при рассеивании вероятностные характеристики в Одессе и Днепре позволяли предположить, что в этих пунктах режим ветра сходный, то модель эллиптического рассеивания свидетельствует о его существенном различии в этих пунктах наблюдений.

Если в Одессе плотности условного распределения полярного угла при значительных скоростях ветра (5 и 10 м/с) имеет максимумы при $\alpha = 340^\circ$ и $\alpha = 160^\circ$, а минимумы – при $\alpha = 80^\circ$ и $\alpha = 270^\circ$, то в пункте наблюдений Днепр максимумы этой функции перемещаются на углы $\alpha = 100^\circ$ и $\alpha = 210^\circ$, а минимумы на углы $\alpha = 180^\circ$ и $\alpha = 340^\circ$.

Интегрирование функций плотности условных распределений полярного угла $\varphi(\alpha/r)$ в заданных пределах дает возможность получить соответствующие вероятности $P[\alpha_i < \alpha < \alpha_j/r]$. В табл. 3 расположены вероятности нахождения функции этой плотности условной вероятности на отрезке $\alpha_j - \alpha_i = 40^\circ = 0.7 \text{ рад}$ для Одессы, Днепра и Львова при скоростях ветра 5 и 10 м/с.

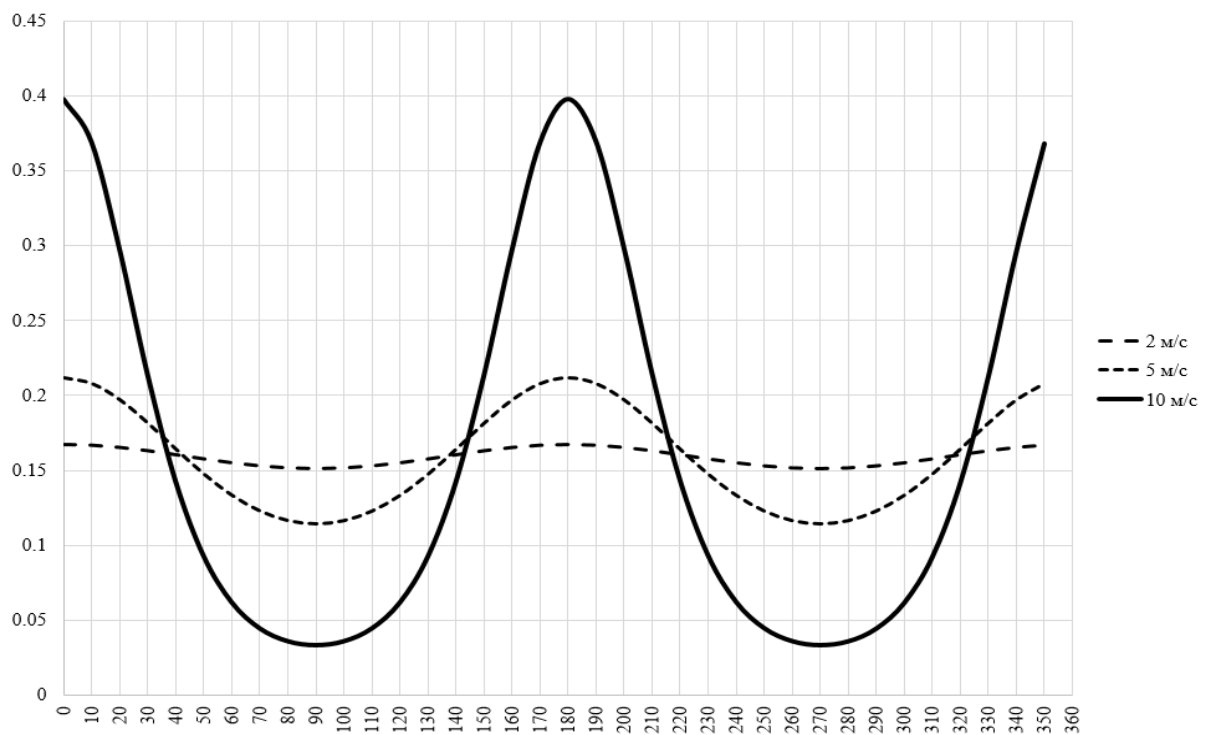


Рис. 2 – График функции $\varphi(\alpha/r)$ при скоростях ветра 2, 5 и 10 м/с. Одесса.

Таблица 3 – Вероятности полярного угла на интервале 40° ($0,7$ рад).

Пункт	r , м/с	Интервалы, в градусах направления ветра								
		0-40	40-80	80-120	120-160	160-200	200-240	240-280	280-320	320-360
Одесса	5	0,14	0,10	0,08	0,13	0,15	0,12	0,06	0,09	0,13
	10	0,20	0,04	0,03	0,013	0,28	0,10	0,02	0,04	0,26
Днепр	5	0,10	0,13	0,13	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,06
	10	0,06	0,15	0,20	0,08	0,05	0,03	0,20	0,15	0,08
Львов	5	0,11	0,07	0,09	0,15	0,14	0,05	0,04	0,13	0,22
	10	0,07	0,02	0,04	0,23	0,21	0,02	0,01	0,12	0,28

Из табл. 3 следует, что наибольшую вероятность в Одессе имеют направления вектора ветра 5 и 10 м/с в пределах от 320° до 40° , а также 160° – 200° , а наименьшую вероятность: 80° – 120° и 240° – 280° . В пункте наблюдения Днепр картина распределения вероятностей пребывания вектора скорости ветра в заданных секторах иная.

При скорости 5 м/с наблюдается практически равномерное распределение по секторам полярного угла. Такое распределение нарушается при скорости ветра 10 м/с. В этом случае имеют место два максимума, которые приходятся на секторы 80° – 120° и 240° – 280° , и два минимума вероятностей в секторах 320° – 40° и 200° – 240° . Во Львове наблюдается хорошо выраженный максимум в секторах 320° – 360° и 120° – 160° , а также два минимума – в секторах 40° – 80° и 240° – 280° .

Как следует из равенства (43) плотность условных вероятностей $\varphi(r/\alpha)$ имеет экспоненциальный характер. В качестве примера на рис. 3 приводится график этой функции при $\alpha = 180^\circ$ в Одессе и при $\alpha = 340^\circ$ во Львове.

Интегрирование указанных функций дает возможность получить вероятности того, что вектор скорости ветра находится в пределах $r_i < r < r_j$. Для Одессы при $\alpha = 180^\circ$ и Львова при $\alpha = 340^\circ$, при которых наблюдаются максимумы вероятностей пребывания вектора скорости ветра, вероятности указанных значений скорости ветра приводятся в табл. 4. Из табл. 4 следует, что режим ветра в Одессе и во Львове существенно различается. В секторах, где

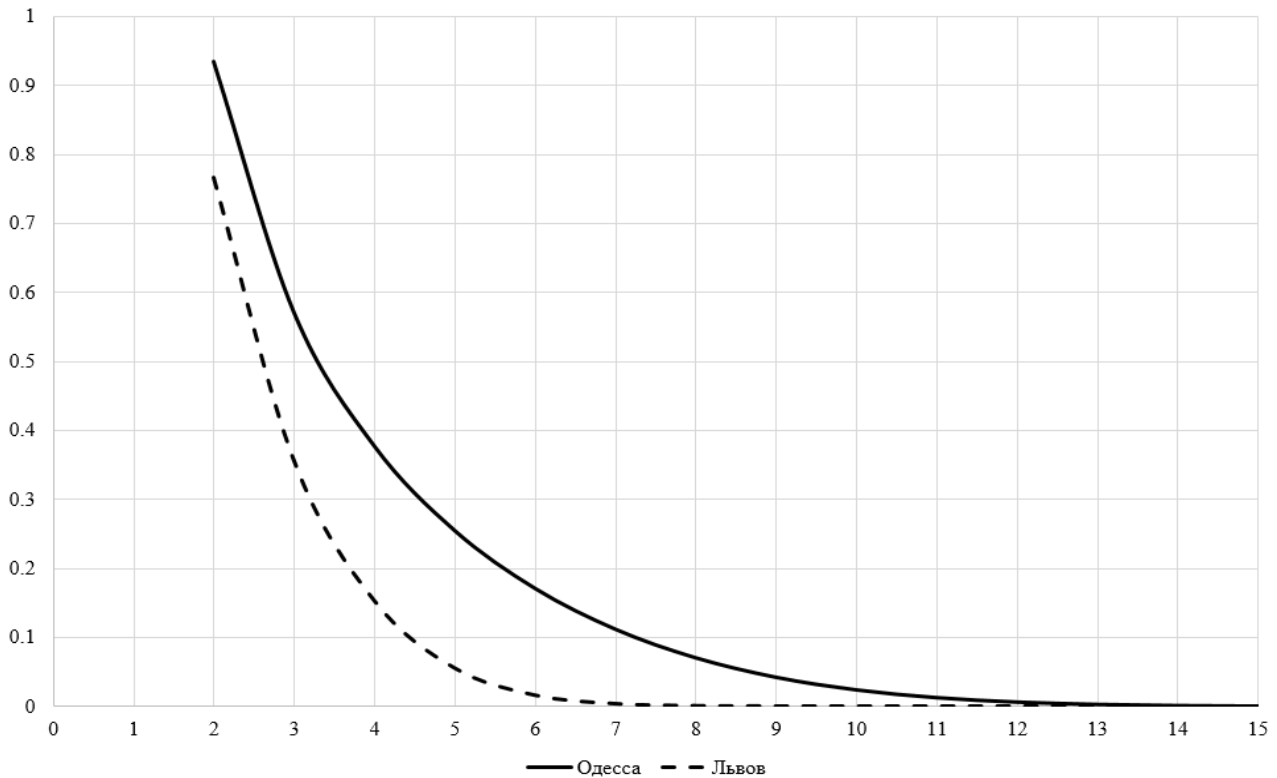


Рис. 3 – Плотность условного распределения вектора скорости ветра в Одессе при $\alpha = 180^\circ$ и во Львове при $\alpha = 340^\circ$.

Таблица 4 – Вероятности $P[r_i < r < r_j]$ при $\alpha = 180^\circ$ (Одесса) и $\alpha = 340^\circ$ (Львов).

Пункты	Интервалы $r_i < r < r_j$				
	$r < 4$ м/с	4-6 м/с	6-8 м/с	8-10 м/с	10-12 м/с
Одесса	0,15	0,51	0,22	0,08	0,04
Львов	0,80	0,16	0,02	0,01	0,01

наблюдается максимум вероятностей пребывания вектора скорости ветра, вероятности этих скоростей ($r = 5$ м/с и $r = 10$ м/с) совершенно разные: во Львове преобладают слабые ветры, а в Одессе они значительны. В Одессе, в секторе 160° - 200° , где наблюдается максимум пребывания ветра скоростью 5 и 10 м/с, вероятность самой скорости ветра 5 м/с составляет 51 %, а 10 м/с – 8 %, в то время как во Львове ветер скоростью 5 м/с реализуется с вероятностью 16 %, а 10 м/с всего лишь с вероятностью около 1 %. Показанный на примерах пунктов наблюдения Одесса и Львов совместный анализ вероятностной структуры векторов скорости ветра можно провести и для других пунктов измерений, как у земли, так и на высотах расположения осей вра-

щения ветрового колеса в пределах приземного слоя атмосферы при наличии соответствующей информации.

5. ВЫВОДЫ

Нормальный закон распределения вероятностей скорости ветра в полярных координатах обладает рядом преимуществ. Прежде всего, в нем, в качестве случайных величин, фигурируют модуль скорости (ее величина r) и направление (полярный угол α), а не проекции вектора на оси xOy . Параметры закона распределения a, b, c непосредственно связаны с полуосями эллипса рассеивания σ_x и σ_y .

Интегрирование плотности вероятностей совме-

стного распределения $\varphi(r, \alpha)$ по модулю скорости дает возможность без особых трудностей получить функции частного $\varphi_r(\alpha)$ и условного $\varphi(r/\alpha)$ распределений. При нахождении вида распределений $\varphi_\alpha(r)$ и $\varphi(\alpha/r)$ возникают существенные трудности, связанные с тем, что интеграл от функции вероятностей вида e^{-x^2} и тем более вида $e^{-x^2 \cos 2\alpha}$ в квадратурах не берется. Приходится прибегать к процедуре разложения исходной функции в степенной ряд и поиска аппроксимаций функции $x(a, b, c, \alpha)$. Дальнейшие вычисления показали, что приближение вида

$$x = -\frac{r^2}{4(1-\rho^2)}(a + b \cos 2\alpha - c \sin 2\alpha)$$

оказалось удачным. Во-первых, оно дало возможность вычислить указанный вероятностный интеграл с достаточной степенью точности. Во-вторых, при использовании часто применяющегося в литературе кругового рассеивания вектора скорости ветра с независимыми проекциями на оси системы координат xOy , частный закон распределения модуля скорости ветра, полученный на основе указанного приближения, приобретает вид распределения Релея, а частный закон распределения полярного угла – равномерного распределения. Это в точности соответствует известным теоремам, изложенным в работе [16], а также в монографии Левина [17].

Совместное рассмотрение условных распределений $\varphi(r/\alpha)$ и $\varphi(\alpha/r)$ позволяет раскрыть важные особенности распределения вектора скорости ветра. Оказалось, что, если учесть эллиптичность распределения модуля скорости ветра, то в рассматриваемых пунктах наблюдения нон не соответствует закону Релея, а распределение полярного угла является близким к равномерному закону только при модуле скорости ветра $r \leq 2$ м/с. Таким образом, широко распространенная в исследованиях гипотеза о круговом нормальном распределении компонент вектора скорости ветра имеет смысл только при весьма ограниченных условиях. Вероятности, рассчитанные в работе на основе данных фактических измерений скорости приземного ветра для пунктов Одесса, Днепр, Львов служат, во-первых, подтверждением обоснованности разработанной модели, и, во-вторых, показывают, что полученные на основе модели эллиптического нормального закона рассеяния вектора скорости ветра в полярных координатах могут быть полезными

при планировании, проектировании и развитии систем ВЭУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов С. Г., Плотников И. А., Сарсикеев Е. Ж. Динамическая модель продольной составляющей скорости ветра // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 5. С. 139 – 145.
2. Van Der Hoven I. Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour. *J. Meteor.*, 1957, no. 14, pp. 160-164.
3. Школьный С. П. Фізика атмосфери. К.: КНТ, 2007. 508 с.
4. Динамическая метеорология (Теоретическая метеорология) // под ред. Д. Л. Лайхмана. Л.: Гидрометеониздат, 1976. 607 с.
5. Капля Е. В. Статистическая модель динамики скорости и направления ветра // Метеорология и гидрология. 2014. №12. С.29-34.
6. Капля Е. В. Система финитного управления приводами лопастей ветроэнергетической установки // Автоматизация и современные технологии. 2013. № 5. С. 13-17.
7. Mahrt L. Surface wind direction variability. *J. Appl. Meteorol and Clim.*, 2011, no. 50, pp. 144-152.
8. Кобышева Н. В., Степанская Г. А., Чмутова З. Е. Оценка потенциальных ветроэнергетических ресурсов на территории СССР // Труды ГГО. 1983. Вып. 475. С. 7-12.
9. Сапицкий К. А., Кобышева Н. В. Потенциальные ветроэнергетические ресурсы Грузии // Тр. ГГО. 1983. Вып. 375. С. 12-15.
10. Гутерман И. Г. Распределение ветра над северным полушарием. Л.: Гидрометеониздат, 1965. 252 с.
11. Юшков В. П. Синоптические флуктуации скорости ветра в пограничном слое атмосферы // Метеорология и гидрология. 2012. № 4. С. 17-28.
12. Венцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Физматлит, 1958. 464 с.
13. Гнаденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Физматлит, 1961. 396 с.
14. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М.: Наука, 1969. 511 с.
15. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
16. Капустин С. Н., Червоный А. А., Колинченко Б. А. Теория вероятностей, математическая статистика и методы исследования операций. Часть первая. М.: «ВАИА», 1961. 594 с.
17. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. М.: "Сов. радио", 1966. 728 с.

REFERENCES

1. Obuhov S. G., Plotnikov I. A., Sarsikeev E. Z. Dynamic model of the longitudinal component of the wind speed. *Sovre-*

- mennye problemy nauki i obrazovaniya – Current problems of science and education*, 2013, no. 5, pp. 139 – 145. (In Russian)
2. Van Der Hoven I. Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour. *J. Meteor.*, 1957, no. 14, pp. 160-164.
 3. Shkol'nyy E. P. *Fizyka atmosfery* [Physics of the atmosphere]. Kyiv: KNT, 2007. 508 p.
 4. Laykhtman D. L. (Ed.) *Dinamicheskaya meteorologiya (Teoreticheskaya meteorologiya)*. [Dynamic Meteorology (Theoretical Meteorology)]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1976. 607 p.
 5. Kaplya E. V. Statistical model of the dynamics of wind speed and direction. *Meteorologiya i gidrologiya – Meteorology and Hydrology*, 2014, no. 12, pp. 29 – 34. (In Russian)
 6. Kaplya E. V. Finite drive control system windmill blades finite drive control system windmill blades. *Avtomatizatsiya i sovremennye tekhnologii – Automation and modern technology*, 2013, no. 5, pp. 13 – 17. (In Russian)
 7. Mahrt L. Surface wind direction variability. *J. Appl. Meteorol and Clim.*, 2011, no. 50, pp. 144-152.
 8. Kobysheva N. V., Stepanskaya G. A., Chmutova Z. E. Assessment of potential wind energy resources on the territory of the USSR. *Trudy GGO – Proc. of the Main Geophysical Observatory*, 1983, vol. 475, pp. 7–12. (In Russian)
 9. Sapickiy K. A., Kobysheva N. V. Potential hydropower resources of Georgia. *Trudy GGO -- Proc. of the Main Geophysical Observatory*, 1983, vol.375, pp. 12 – 15. (In Russian)
 10. Guterman I. G. *Raspreделение vetra nad severnym polushariem* [Wind distribution over the Northern Hemisphere]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1965. 252 p.
 11. Yushkov V. P. Synoptic wind velocity fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Meteorologiya i gidrologiya – Meteorology and Hydrology*, 2012, no. 4, pp. 17 – 28. (In Russian)
 12. Vencel E. S. *Teoriya veroyatnostey* [Theory of probability]. Moscow, 1958. 464 p.
 13. Gnadenko B. V. *Kurs teorii veroyatnostey* [The course in probability theory]. Moscow: Fizmatlit, 1961. 396 p.
 14. Smirnov N. V., Dunin-Barkovskiy I. V. *Kurs teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistiki dlya tekhnicheskikh prilozheniy* [The course of the theory of probability and mathematical statistics for technical applications]. Moscow: Nauka, 1969. 511 p.
 15. Mitropol'skiy A. K. *Tekhnika statisticheskikh vychisleniy* [Technique statistical calculations]. Moscow: Nauka, 1971. 576 p.
 16. Kapustin S. N., Chervonyj A. A., Kolinichenko B. A. *Teoriya veroyatnostey, matematicheskaya statistika i metody issledovaniya operatsiy* [Probability theory, mathematical statistics and operations research techniques]. Moscow, 1961. 594 p.
 17. Levin B. R. *Teoreticheskie osnovy statisticheskoy radio-tekhniki. Kniga 1* [Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering. Book 1]. Moscow, 1966. 728 p.

NORMAL LAW OF DISTRIBUTION OF WIND VELOCITY VECTOR IN POLAR COORDINATES

E. P. Shkolnyy, Prof., Dr. Sc.(Tech.)

*Odessa State Environmental University,
15, Lvivska St., 65016 Odessa, Ukraine, Eshcolny@gmail.com*

It is impossible to organize wind energy systems without studying of wind speed regime at the surface layer of the atmosphere within a specific area and at climatic scales. Such studies are often accompanied by approximations of probabilities of wind speed performed in the form of normal law of a system of random values presented by a zonal u and a meridional v which are components of a wind speed vector. It is suggested that, for the purposes of wind energy, display of a wind speed vector in polar coordinates (r, α) where r is a module of wind speed and α is a polar angle appears to be more preferable. The article shows a transform from a normal law of distribution of probabilities with density $\phi(u, v)$ to a normal law distribution with density $\phi(r, \alpha)$ completed by means of functional transformation with elliptic dispersion in place. Based on a normal law of distribution $\phi(r, \alpha)$ and through integration with respect to corresponding variables (r, α) individual distributions of probabilities $\phi(r)$ and $\phi(\alpha)$ as well as conditional distributions of probabilities $\phi(r/\alpha)$ and $\phi(\alpha/r)$ were obtained in the areas of their existence. The article shows individual distributions in case of circular and elliptic dispersion of a wind speed vector. It shows that an individual distribution of a wind speed probability in case of circular

dispersion and in the absence of correlated dependence turns into the Rayleigh's distribution and a conditional distribution of a polar angle degenerates in an even distribution. The cases of distributions with dispersions of a wind speed module having elliptic properties subject to availability of correlated connection between wind speed components were also studied. Calculation of probabilities of a polar angle being within different sections of the area $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ with set values of a wind speed module also took place. Numerical experiments proved the advantage of such modeling of distributions of wind speed vector.

Keywords: wind speed, probability density, individual and conditional distribution, dispersion, Fisher criterion.

НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ВЕКТОРА ШВИДКОСТІ У ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТАХ

Є.П. Школьний, д-р техн. наук, проф.

*Одеський державний екологічний університет,
вул. Львівська, 15, 65016, Одеса, Україна, Eshcolny@gmail.com*

В статті шляхом функціонального перетворення втілюється перехід від нормального закону розподілу зональної та меридіональної компонент швидкості вітру до нормального закону розподілу модуля вектора вітру і полярного кута. Отримані частинні й умовні розподіли цих випадкових величин. Вони свідчать про те, що при круговому розсіюванні некорельованих складових швидкості вітру частинний розподіл модуля швидкості вітру стає розподілом Релея, а умовний розподіл вироджується у рівномірний розподіл. Досліджені випадки еліптичного розсіювання компонент швидкості вітру при їх корельованості й при відсутності кореляційного зв'язку.

Ключові слова: швидкість вітру, щільність ймовірностей, частковий та умовний розподіли, дисперсія, критерій Фішера.

*Дата першого подання: 27. 12. 2016
Дата надходження остаточної версії: 29. 03. 2017
Дата публікації статті: 26. 10. 2017*