

УДК 504.4:54

## РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВЗВЕСИ ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ ДНОУГЛУБИТЕЛЬНЫХ РАБОТ

С. Н. Юрасов, А. Д. Комаренко

Одесский государственный экологический университет,  
ул. Львовская, 15, 65016, Одесса, Украина, [urasen54@gmail.com](mailto:urasen54@gmail.com)

Проблема оценки распространения взвеси при производстве дноуглубительных работ актуальна по причине большого объёма ежегодного капитального и эксплуатационного дноуглубления в портах Украины, которое составляет более 4,5 млн. м<sup>3</sup> грунта. Выполнение дноуглубительных работ связано с поступлением в морскую среду взвеси, которая оказывает на морские экосистемы сильное воздействие. Масштаб наносимого ущерба зависит от характеристик зоны повышенной мутности, достоверная оценка этих характеристик позволяет определить реальный ущерб, который по действующему природоохранному законодательству должен быть компенсирован.

Характеристики зоны повышенной мутности проще всего получить путём численного моделирования процесса распространения взвеси. Возможность получения решений на более общих основаниях по сравнению с аналитическими методами, гораздо меньшие временные и денежные затраты, чем при натуральных экспериментах, и современное компьютерное обеспечение позволили широко внедрить в практику научных исследований методы этого моделирования.

Статья посвящена исследованию численной модели распространения взвеси при производстве дноуглубительных работ. В ней рассмотрены явная, неявная и смешанная конечно-разностные схемы решения стационарного дифференциального уравнения турбулентной диффузии взвеси в плоской постановке задачи. Выполнено несколько серий расчётов при разных параметрах модели, проанализированы полученные решения, дана оценка расхождения результатов расчетов по разным схемам и предложены оптимальные параметры расчётной сетки. Приводятся рекомендации по численному моделированию распространения взвеси в водном потоке. В частности, рекомендуется: использовать явную схему; количество струй в зоне выемки грунта принять не более 3; количество шагов до контрольного створа – не менее 75; при использовании неявной или смешанной схемы к конечному результату в области неустойчивости явной схемы необходимо вводить поправку с учётом общего количества вещества в створе.

**Ключевые слова:** стационарная модель; плоская постановка; конечно-разностная схема; турбулентная диффузия; взвесь.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое применение получили численные эксперименты при моделировании различных процессов. Исследование турбулентной диффузии взвешенного вещества (взвеси) при производстве дноуглубительных работ (дноработ) не является исключением.

Процесс дноуглубления состоит из трёх технологических операций: разработка (извлечение), перевозка и сброс грунта в подводный (дампинг) или береговой отвал. Наиболее сильное воздействие на морскую среду оказывают извлечение грунта и дампинг. Настоящая статья посвящена исследованию

распространения взвеси при выработке грунта дноуглубительным снарядом.

Актуальность этой проблемы состоит, прежде всего, в том, что ежегодно в портах Украины при капитальном и эксплуатационном дноуглублении изымается более 4,5 млн. м<sup>3</sup> грунта [1]. Производство дноработ сопряжено с вторичным загрязнением водной среды минеральной взвесью и другими веществами, аккумулированными в донных отложениях. Область повышенной мутности распространяется на большие расстояния, наносится ущерб морской экосистеме за счёт гибели организмов планктонных и бентосных сообществ.

Государственные меры по охране

окружающей среды включают компенсационные платежи за сброс загрязняющих веществ в водную среду и за ущерб, нанесённый водным биоресурсам. В каждом конкретном случае платёж может быть очень большим в зависимости от объёма работ, гидрологических и гидробиологических характеристик района их производства.

Для количественной оценки платежа по какому-либо объекту необходимо знать: максимальное значение концентрации загрязняющих веществ на контрольном удалении от места разработки грунта; общее количество вещества, вынесенного за пределы этого расстояния; размеры зоны загрязнения. Из-за больших временных и денежных затрат натурные эксперименты для получения этих характеристик на каждом объекте не выполняются. Численное же моделирование при современном компьютерном обеспечении особых затруднений не вызывает.

В настоящее время существует много методик оценки параметров зоны повышенной мутности [2-5], однако, они все имеют ряд недостатков. К основным недостаткам двумерных моделей следует отнести существенную погрешность оценки максимального значения концентрации взвеси со скоростью оседания частиц более 0,1 см/с на небольшом удалении контрольного створа от источника загрязнения. Кроме того, в них источник загрязнения является точкой. Размеры зоны повышенной мутности в начальном створе на небольшом удалении от него часто нельзя рассматривать как точку.

В статье рассматривается стационарная модель распространения взвеси при выполнении дноработ. Решение уравнения (1) выполнено методом конечных разностей по явной, неявной и смешанной схемам. Особенность данного метода состоит в том, что конечный результат зависит от параметров расчётной сетки (размеров ячейки). Кроме того, упомянутые схемы обладают своими преимуществами и недостатками. Для разработки рекомендаций по численному моделированию рассматриваемого процесса необходимо выполнить анализ расчётов по упомянутым схемам, выбрать более подходящую схему для решения поставленной задачи и оптимизировать параметры модели.

*Цель исследования* – определение оптимальной конечно-разностной схемы и параметров расчётной сетки численной модели турбулентной диффузии взвеси при производстве дноуглубительных работ.

*Объект исследования* – воздействие дноуглубительных работ на морскую среду.

*Предмет исследования* – разработка рекомендаций по численному моделированию распространения взвеси при извлечении грунта.

## 2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Стационарную модель турбулентной диффузии взвеси в плоской постановке задачи с начальными и граничными условиями можно записать в виде [6, 7]:

$$V_{CP}(\partial C/\partial x) = D_T(\partial^2 C/\partial z^2) - uC/H_{CP}, \quad (1)$$

$$C(x,z) = C_0, \text{ при } x = 0 \text{ и } z_1 \leq z \leq z_2,$$

$$C(x,z) = 0, \text{ при } x = 0 \text{ и } z < z_1 \text{ или } z > z_2,$$

$$\partial C/\partial z = 0, \text{ при } x \geq 0, z = 0 \text{ и } z = B_{CP},$$

где  $V_{CP}$  – средняя скорость потока, м/с;  $C$  – концентрация взвеси, мг/дм<sup>3</sup>;  $x$  и  $z$  – переменные;  $D_T$  – коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии, м<sup>2</sup>/с;  $u$  – гидравлическая крупность частиц, м/с;  $H_{CP}$  – средняя глубина акватории, м;  $C_0$  – значение концентрации взвеси в зоне выработки грунта, мг/дм<sup>3</sup>;  $B_{CP}$  – средняя ширина потока.

В этой модели рассматривается среднее значение концентрации взвеси по вертикали. Ось  $OX$  направлена вдоль осредненного вектора скорости течения, ось  $OY$  – вертикально вниз, а ось  $OZ$  – поперек потока. Выемка грунта осуществляется в створе  $x=0$ , в интервале  $z_1 \leq z \leq z_2$ . При выемке у берега  $z_1=0$ , обмен взвесью с правой и левой границами потока отсутствует. Поток взвеси на дно равен  $uC(x,z)$ .

Решим уравнение (1) методом конечных разностей. Этот метод широко применяется при решении дифференциальных уравнений в частных производных и его использование не нуждается в каком-либо обосновании. Отметим лишь, что данным методом решение можно найти по явной, неявной или смешанной схемам [8, 9].

Рассмотрим сначала явную конечно-разностную схему (рис. 1).

	0	1	...	$k$	$k+1$	...
1(M)	$\uparrow \Delta z$	...	...	$C_{k,1}$	$C_{k+1,1}$	...
2(M-1)			...	$C_{k,2}$		
...			...	...	...	...
$m-1$	$\leftarrow \Delta x \rightarrow$		...	$C_{k,m-1}$		
$m$			...	$C_{k,m}$	$C_{k+1,m}$	
$m+1$			...	$C_{k,m+1}$		
...			...	...	...	...

Рис. 1 – Явная конечно-разностная схема

На схеме индексом  $k$  обозначены створы, проведенные в расчетной области потока с шагом  $\Delta x$ . Индексом  $m$  обозначена нумерация струй, ширина которых –  $\Delta z$ . Среднее значение концентрации взвеси в  $k$ -м створе в пределах струи с номером  $m$  расположено в его центре и обозначено  $C_{k,m}$ .

Выразим все частные производные в уравнении (1) в виде разности значений сеточной функции по схеме на рис. 1 и решим его относительно  $C_{k+1,m}$  [6]:

при  $2 \leq m \leq (M-1)$

$$\partial C / \partial x \approx (C_{k+1,m} - C_{k,m}) / \Delta x, \quad (2)$$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k,m+1} - 2C_{k,m} + C_{k,m-1}) / \Delta z^2, \quad (3)$$

$$C_{k+1,m} = (1 - 2a - f)C_{k,m} + a(C_{k,m+1} + C_{k,m-1}); \quad (4)$$

при  $m=1$

$$\partial C / \partial x \approx (C_{k+1,1} - C_{k,1}) / \Delta x, \quad (5)$$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k,2} - C_{k,1}) / \Delta z^2, \quad (6)$$

$$C_{k+1,1} = (1 - a - f)C_{k,1} + aC_{k,2}; \quad (7)$$

при  $m=M$

$$\partial C / \partial x \approx (C_{k+1,M} - C_{k,M}) / \Delta x, \quad (8)$$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k,M-1} - C_{k,M}) / \Delta z^2, \quad (9)$$

$$C_{k+1,M} = (1 - a - f)C_{k,M} + aC_{k,M-1}, \quad (10)$$

где  $a = \Delta x D / (V_{CP} \Delta z^2)$ ;  $f = u \Delta x / (V_{CP} H_{CP})$ .

$M = B_{CP} / \Delta z$  – общее количество струй по ширине потока, при  $(2a + f) \leq 1$ .

Полученные уравнения (4), (7) и (10) позволяют по значениям концентрации взвеси в  $k$ -м створе рассчитать значения в следующем  $(k+1)$ -м створе. Расчет выполняется, начиная со створа  $k=1$ . В предшествующем для него створе ( $k=0$ ) распределение концентрации взвеси задается: в начальном количестве струй  $M_0$  в пределах выемки грунта предполагается равномерное распределение взвеси с концентрацией  $C_0$ . В остальных струях значение концентрации взвеси равно 0. При выемке грунта на удалении от берега на каждом шаге количество струй в зоне повышенной мутности увеличивается на 2 (если выемка у берега – на 1), поэтому в  $k$ -м створе общее количество струй в этой области составляет  $M_k = M_0 + 2k$ , при  $(M_0 + 2k) \leq M$ , а при  $(M_0 + 2k) > M$  зона повышенной мутности распространяется на всю ширину потока  $M_k = M$ . При  $(z_1 / \Delta z) - k > m > (z_2 / \Delta z) + k$  значения  $C_{k,m} = 0$ .

По формулам (4), (7) и (10) видно, что сумма

коэффициентов при значениях концентрации взвеси равна  $(1-f)$ . Это означает, что в  $(k+1)$ -м створе количество вещества в  $(1-f)$  раза меньше, чем в предыдущем  $k$ -м. Исходя из этого, можно записать следующее условие проверки расчетов

$$\sum C_{k,m} = (1-f)^k M_0 C_0. \quad (11)$$

Явная конечно-разностная схема имеет преимущество в том, что решение в следующем створе получается сразу по значениям сеточной функции в предыдущем створе. Ее недостаток состоит в неустойчивости решения при  $(2a+f) > 1$ .

Неявная конечно-разностная схема абсолютно устойчива. Однако решение по этой схеме требует использования метода прогонки. Рассмотрим это решение (рис. 2).

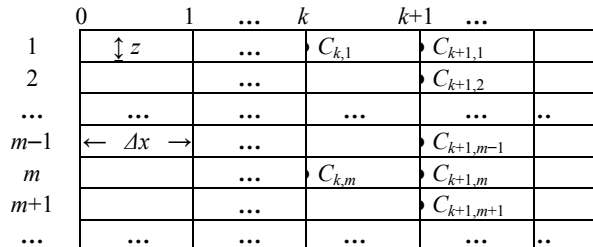


Рис. 2 – Неявная конечно-разностная схема

Выразим частные производные в уравнении (1) в виде разности значений сеточной функции по схеме на рис. 2:

при  $m \geq 2$

$$\partial C / \partial x \approx (C_{k+1,m} - C_{k,m}) / \Delta x, \quad (12)$$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k+1,m+1} - 2C_{k+1,m} + C_{k+1,m-1}) / \Delta z^2; \quad (13)$$

при  $m=1$

$$\partial C / \partial x \approx (C_{k+1,1} - C_{k,1}) / \Delta x, \quad (14)$$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx (C_{k+1,2} - C_{k+1,1}) / \Delta z^2. \quad (15)$$

Решение (1) можно записать в следующем виде

$$\beta_m C_{k+1,m} = a C_{k+1,m+1} + a C_{k+1,m-1} + \delta_m, \quad (16)$$

где  $\beta_m = (1 + 2a + f)$ ,  $\delta_m = C_{k,m}$ , при  $m \geq 2$ ;

$\beta_1 = (1 + a + f)$ ,  $C_{k+1,1-1} = 0$ ,  $\delta_1 = C_{k,1}$ , при  $m=1$ .

Обозначения  $a$  и  $f$  прежние (см. (10)).

В нашем случае для любого створа выражение (16) представляет собой систему с  $M_k$  алгебраическими уравнениями. Матрица, соответствующая им, является, трех-диагональной: по диагонали матрицы стоят коэффициенты  $\beta_m$ ; слева и справа от них –  $a$ ; остальные коэффициенты матрицы равны нулю. Такая система алгебраических уравнений

решается методом прогонки.

Для прямого и обратного хода прогонки решение ищется в виде:

$$C_m = P_m C_{m+1} + Q_m, \quad (17)$$

$$C_{m-1} = P_{m-1} C_m + Q_{m-1}, \quad (18)$$

$$\text{где } P_m = a/\beta_m \text{ и } Q_m = [aC_{m-1} + \delta_m]/\beta_m. \quad (19)$$

Для удобства в уравнениях (17) и (18) индекс нумерации створов убран.

Для расчёта прогоночных коэффициентов  $P_m$  и  $Q_m$  используются следующие рекуррентные соотношения:

$$P_m = a/[\beta_m - aP_{m-1}],$$

$$Q_m = [aQ_{m-1} + \delta_m]/[\beta_m - aP_{m-1}]. \quad (20)$$

В начале рекуррентного процесса при  $m=1$  значения прогоночных коэффициентов  $P_1$  и  $Q_1$  известны, они равны:

$$P_1 = a/\beta_1 = a/(1+a+f),$$

$$Q_1 = \delta_1/\beta_1 = C_{k,1}/(1+a+f), \quad (21)$$

где  $C_{k,1}$  – значение сеточной функции в первой струе в предыдущем створе.

На прямом ходу прогонки, используя значения  $P_1$  и  $Q_1$ , по формулам (20) рассчитываются значения прогоночных коэффициентов  $P_m$  и  $Q_m$ .

В конце прямого хода при  $m=M_k$  по уравнению (17) видно, что  $C_{M_k} = Q_{M_k}$ , поскольку  $C_{M_k+1} = 0$ . С этого момента начинается обратный ход прогонки: зная  $C_{M_k}$ , по формуле (18) рассчитываются значения сеточной функции в струе с номером  $M_k-1$ . Потом  $M_k-2$  и так далее, до  $m=1$ .

Сумма коэффициентов  $\beta_m$  и  $2a$  в (16) равна  $(1+f)$ , поэтому по аналогии с (11) выражение для проверки расчетов можно записать в виде

$$\sum C_{k,m} = (1+f)^{-k} M_0 C_0. \quad (22)$$

Численные эксперименты показали, что из-за наличия погрешностей при расчете значений сеточной функции по неявной схеме, значения правой и левой частей условия (22) не совпадают. Причем, погрешность зависит от исходных параметров модели: с увеличением  $M_0$ , погрешность увеличивается. Этот недостаток отсутствует при расчетах по явной схеме: в любом створе, при любых исходных параметрах модели, обеспечивающих устойчивость решения, значения правой и левой частей условия (11) совпадают.

Явная и неявная схемы имеют первый порядок сходимости (точности) по  $x$  и второй порядок сходимости по  $z$ . Они с разных сторон приближаются к некоторому аналитическому решению. Смешанная схема имеет второй порядок сходимости по обоим переменным, т.е. у этой схемы сходимость по  $x$  на порядок выше, чем у неявной и явной схем.

Рассмотрим смешанную схему (рис. 3). Поиск решения по ней осуществляется по явной и неявной схемам с весовыми коэффициентами  $(1-\sigma)$  и  $\sigma$ . Если  $\sigma=0,5$ , такая схема называется схемой Кранка-Николсона. Она обладает абсолютной устойчивостью решения.

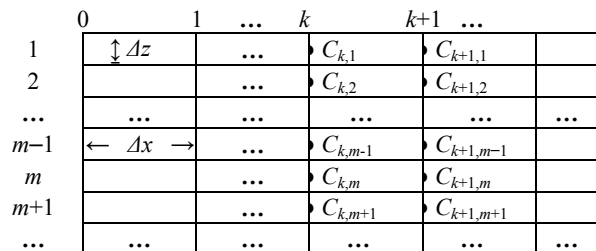


Рис. 3 – Смешанная конечно-разностная схема

Частные производные по  $x$  при различных  $m$  по смешанной схеме (рис. 3) будут иметь такое же выражение, как и по другим схемам (см. формулы (2), (5), (12) и (14)). Вторая же частная производная по  $z$  будет иметь следующий вид:

при  $m \geq 2$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx [0,5(C_{k+1,m+1} - 2C_{k+1,m} + C_{k+1,m-1}) + 0,5(C_{k,m+1} - 2C_{k,m} + C_{k,m-1})] / \Delta z^2; \quad (23)$$

при  $m=1$

$$\partial^2 C / \partial z^2 \approx [0,5(C_{k+1,2} - C_{k+1,1}) + 0,5(C_{k,2} - C_{k,1})] / \Delta z^2. \quad (24)$$

После подстановки частных производных в уравнение (1) можно записать выражение аналогичное выражению (18), полученному по неявной схеме, а именно:

$$\beta_m^{(1)} C_{k+1,m} = 0,5a C_{k+1,m+1} + 0,5a C_{k+1,m-1} + \delta_m^{(1)}, \quad (25)$$

где при  $m \geq 2$

$$\beta_m^{(1)} = (1+a+0,5f) \text{ и}$$

$$\delta_m^{(1)} = C_{k,m}(1-a-0,5f) + 0,5a(C_{k,m+1} + C_{k,m-1});$$

при  $m=1$

$$\beta_1^{(1)} = (1+0,5a+0,5f) \text{ и}$$

$$\delta_1^{(1)} = C_{k,1}(1-0,5a-0,5f) + 0,5a C_{k,2}.$$

Обозначения  $a$  и  $f$  прежние.

Решение (25) выполняется методом прогонки по таким же соотношениям для прямого и обратного хода, как и для неявной схемы

$$C_m = P_m C_{m+1} + Q_m, \quad (26)$$

$$C_{m-1} = P_{m-1} C_m + Q_{m-1}, \quad (27)$$

где  $P_m = 0,5a/\beta_m^{(1)}$  и

$$Q_m = [0,5aC_{m-1} + \delta_m^{(1)}] / \beta_m^{(1)}. \quad (28)$$

Рекуррентные соотношения для прямого хода прогонки при поиске прогоночных коэффициентов  $P_m$  и  $Q_m$  следующие

$$P_m = 0,5a / [\beta_m^{(1)} - 0,5aP_{m-1}] \text{ и}$$

$$Q_m = [0,5aQ_{m-1} + \delta_m^{(1)}] / [\beta_m^{(1)} - 0,5aP_{m-1}]. \quad (29)$$

Последовательность и условия расчета аналогичные неявной схеме:

при  $m=1$  значения прогоночных коэффициентов  $P_1$  и  $Q_1$  равны:

$$P_1 = 0,5a/\beta_1^{(1)} = 0,5a/(1+0,5a+0,5f),$$

$$Q_1 = \delta_1^{(1)}/\beta_1^{(1)} =$$

$$= [C_{k,1}(1-0,5a-0,5f) + 0,5aC_{k,2}] / (1+0,5a+0,5f); \quad (30)$$

при  $m=M_k$  значение  $C_{M_k}$  равно  $Q_{M_k}$ .

Сумма коэффициентов в (26)  $\beta_m^{(1)}$  и  $a$  равна  $(1+0,5f)$ , а коэффициентов, входящих в  $\delta_m^{(1)}$ , составляет  $(1-0,5f)$ . В этом случае условие проверки расчетов будет иметь следующий вид

$$\sum C_{k,m} = C_0 M_0 (1-0,5f)^k (1+0,5f)^{-k}. \quad (31)$$

Расчёты показали, что условие (31) выполняется с некоторой погрешностью, которая меньше, чем в неявной схеме.

Среди рассмотренных конечно-разностных схем явная схема более предпочтительна в силу однозначности вывода при невыполнении условия проверки расчетов: если условие (11) не выполняется – необходимо искать ошибку в алгоритме расчета. В других схемах это несовпадение заложено изначально. Оно вызвано погрешностями расчета значений концентрации взвеси в каждом створе, и сюда же могут добавиться погрешности, вызванные ошибками в алгоритме расчета.

Для реализации явной схемы необходимо примерно в три раза меньше машинной памяти. Полученные решения имеют физический смысл. Например, равенство (4) показывает, что количество взвеси  $C_{k+1,m}$  в струе  $m$  в створе  $(k+1)$  формируется за счет адвективного переноса в этой же струе части взвеси  $C_{k,m}$  с коэффициентом

$(1-2a-f)$  с предыдущего створа  $k$  и за счет турбулентной диффузии с коэффициентом  $a$  из соседних струй  $C_{k,m+1}$  и  $C_{k,m-1}$ .

При невыполнении условия устойчивости схемы  $(2a+f > 1)$  теряется физический смысл: в равенстве (4) первое слагаемое становится отрицательным (количество переносимой взвеси не может быть с отрицательным знаком). Дальнейшие вычислительные эксперименты показали, что при неустойчивости решения по явной схеме, результаты расчета по неявной и Кранка-Николсона схемам существенно выделяются среди выполненных ранее расчетов.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ АНАЛИЗ

Оценим погрешность расчетов значений концентрации взвеси по упомянутым схемам и оптимизируем параметры расчётной сетки. Для этого рассмотрим максимальное значение концентрации взвеси в контрольном створе ( $C_{MAX}$ ). Функцию  $C_{MAX}$  в плоской постановке задачи можно представить в следующем виде:

$$C_{MAX}/C_0 = \varphi(X, D, \Delta x, \Delta z, u, V_{CP}, H_{CP}, B_0), \quad (32)$$

где  $C_0$  – начальная концентрация взвеси;  $X$  – расстояние до контрольного створа;  $D$  – коэффициент турбулентной диффузии;  $\Delta x$  и  $\Delta z$  – параметры сетки;  $u$  – гидравлическая крупность взвеси;  $V_{CP}$  – средняя скорость потока;  $H_{CP}$  – глубина акватории;  $B_0$  – ширина выемки грунта в начальном створе.

Все переменные в выражении (32) можно сгруппировать в 4 безразмерных параметра:

$$a = D\Delta x / (V_{CP}\Delta z^2); \quad f = u\Delta x / (V_{CP}H_{CP});$$

$$M_0 = B_0/\Delta z; \quad K_{KC} = X/\Delta x. \quad (33)$$

Особенность конечно-разностных схем состоит в том, что значение рассматриваемой величины, полученное в результате численного эксперимента, кроме других параметров, зависит и от параметров сетки. В случае плоской постановки задачи  $C_{MAX}$  на некотором удалении от места сброса зависит от начального количества струй, занятых взвесью ( $M_0$ ), и от количества шагов до контрольного створа ( $K_{KC}$ ). При этом, чем больше  $M_0$  (меньше  $\Delta z$ ) и  $K_{KC}$  (меньше  $\Delta x$ ), тем ближе оценка к некоторому аналитическому значению искомой величины.

Необходимо отметить, что уменьшение  $\Delta x$  и  $\Delta z$  влечет за собой увеличение объема вычислений. На практике количество шагов определяется выбором приемлемой разности

между численными результатами и аналитическим значением (в данной статье погрешность предполагается не более 5%).

Для сопоставления результатов численных экспериментов были выполнены расчеты по явной, Кранка-Николсона и неявной схемам при различных  $K_{КС}$  и  $M_0$ . Результаты помещены в табл. 1, 2 и показаны на рис. 4–6 (на всех рисунках результаты, полученные по явной схеме обозначены точечной линией, Кранка-Николсона – пунктир, неявной – сплошной линией).

Пропуски в табл. 1 соответствуют случаям неустойчивости явной схемы:  $(2a+f)>1$ .

**Таблица 1** – Значения  $C_{MAX}$  в контрольном створе по явной, Кранка-Николсона и неявной схемам при  $u=0$  и  $u=1,4$  см/с

a	f	M <sub>0</sub>	K <sub>КС</sub>	C <sub>MAX</sub> , %			Откл., %	
				явн.	К.-Н.	н/я	явн.	н/я
0,0956	0,0000	1	10	52,1	53,3	54,4	-2,2	2,1
0,0382	0,0000	1	25	52,9	53,3	53,8	-0,8	1,0
0,0191	0,0000	1	50	53,1	53,3	53,6	-0,4	0,5
0,0127	0,0000	1	75	53,2	53,3	53,5	-0,2	0,4
0,0096	0,0000	1	100	53,2	53,3	53,5	-0,1	0,3
0,0048	0,0000	1	200	53,3	53,3	53,4	0,0	0,2
0,0956	0,0875	1	10	20,1	22,2	24,3	-10	9,0
0,0382	0,0350	1	25	21,4	22,2	23,1	-4,1	3,5
0,0191	0,0175	1	50	21,8	22,2	22,7	-2,2	1,6
0,0127	0,0117	1	75	22,0	22,2	22,5	-1,6	1,0
0,0096	0,0088	1	100	22,0	22,2	22,5	-1,2	0,7
0,0048	0,0044	1	200	22,1	22,2	22,3	-0,8	0,2
0,0510	0,0000	2	75	53,0	53,1	53,3	-0,6	0,0
0,1147	0,0000	3	75	52,9	53,0	53,2	-0,7	-0,3
0,2040	0,0000	4	75	52,9	52,9	53,0	-0,8	-0,6
0,4589	0,0000	6	75	52,9	52,5	52,4	-0,8	-1,7
0,8159	0,0000	8	75		51,7	51,6		-3,2
1,2748	0,0000	10	75		50,8	50,6		-5,0
0,0510	0,0117	2	75	21,9	22,1	22,4	-2,0	0,6
0,1147	0,0117	3	75	21,8	22,1	22,4	-2,1	0,4
0,2040	0,0117	4	75	21,8	22,1	22,3	-2,1	0,0
0,4589	0,0117	6	75	21,8	21,9	22,1	-2,2	-1,0
0,8159	0,0117	8	75		21,6	21,7		-2,5
1,2748	0,0117	10	75		21,2	21,3		-4,3

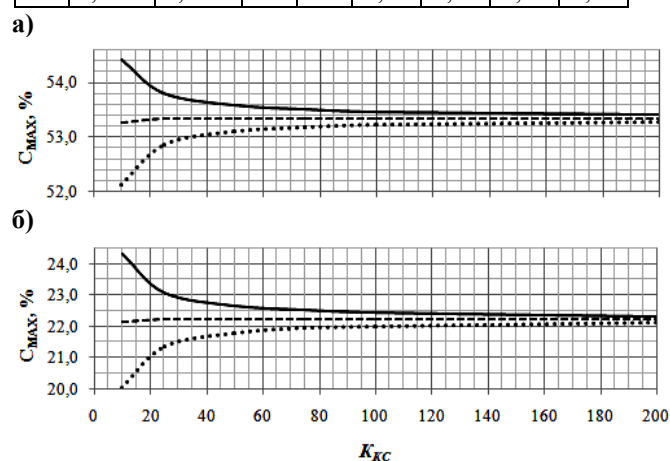
Анализ результатов численных экспериментов показывает, что длина ячейки расчётной сетки должна быть такой, чтобы количество шагов до контрольного створа ( $K_{КС}$ ) было не менее 75 (табл. 1 первый и второй блоки; рис. 4), при этом отклонение от аналитического решения не будет превышать 5%. На рис. 4а аналитическое решение равно примерно 53,3%, на рис. 4б – 22,2%.

В области устойчивости явной схемы (табл. 1 третий и четвёртый блоки; рис. 5, а)  $M_0 < 6$ ,

б)  $a < 0,5$ ) значения  $C_{MAX}$  отклоняются от аналитического решения в допустимых пределах. Однако при  $M_0 > 6$  ( $a > 0,5$ ) отклонение становится значительным.

**Таблица 2** – Значения  $C_{MAX}$  в контрольном створе по Кранка-Николсона и неявной схемам при  $u=0$  и  $u=1,4$  см/с до и после корректировки по формулам (34) и (35)

	a	f	M <sub>0</sub>	K <sub>КС</sub>	C <sub>MAX</sub> , %		Откл., %	
					К.-Н.	н/я	К.-Н.	н/я
до коррект.	5,7366	0,0000	3	75	0,94	1,28	-88,5	-84,3
	4,3024	0,0000	3	100	1,87	2,15	-77,1	-73,6
	3,4420	0,0000	3	125	2,77	2,96	-66,0	-63,7
	2,8683	0,0000	3	150	3,57	3,65	-56,2	-55,1
	2,1512	0,0000	3	200	4,79	4,73	-41,2	-41,9
	1,7927	0,0000	3	240	5,48	5,35	-32,7	-34,3
после коррект.	5,7366	0,0000	3	75	9,50	9,61	16,5	17,9
	4,3024	0,0000	3	100	8,86	8,94	8,76	9,73
	3,4420	0,0000	3	125	8,58	8,64	5,30	6,05
	2,8683	0,0000	3	150	8,44	8,48	3,50	4,11
	2,1512	0,0000	3	200	8,31	8,34	1,93	2,39
	1,7927	0,0000	3	240	8,25	8,28	1,20	1,57
до коррект.	5,7366	0,0233	3	75	0,16	0,24	-88,7	-83,1
	4,3024	0,0175	3	100	0,32	0,39	-77,4	-72,4
	3,4420	0,0140	3	125	0,48	0,53	-66,3	-62,7
	2,8683	0,0117	3	150	0,62	0,65	-56,7	-54,3
	2,1512	0,0088	3	200	0,83	0,84	-41,8	-41,5
	1,7927	0,0073	3	240	0,95	0,94	-33,4	-34,0
после коррект.	5,7366	0,0233	3	75	1,65	1,72	15,4	20,0
	4,3024	0,0175	3	100	1,54	1,59	7,70	11,1
	3,4420	0,0140	3	125	1,49	1,53	4,28	6,96
	2,8683	0,0117	3	150	1,47	1,50	2,50	4,71
	2,1512	0,0088	3	200	1,44	1,47	0,95	2,59
	1,7927	0,0073	3	240	1,43	1,45	0,22	1,58



**Рис. 4** – Значения  $C_{MAX}$  в зависимости от  $K_{КС}$  при  $M_0=1$ : а)  $u=0$ ; б)  $u=1,4$  см/с

Для обеспечения устойчивости явной схемы ( $2a+f \leq 0,96$ ) с учётом вероятного диапазона значений скорости оседания частиц  $u$ , можно рекомендовать –  $M_0 \leq 3$ .

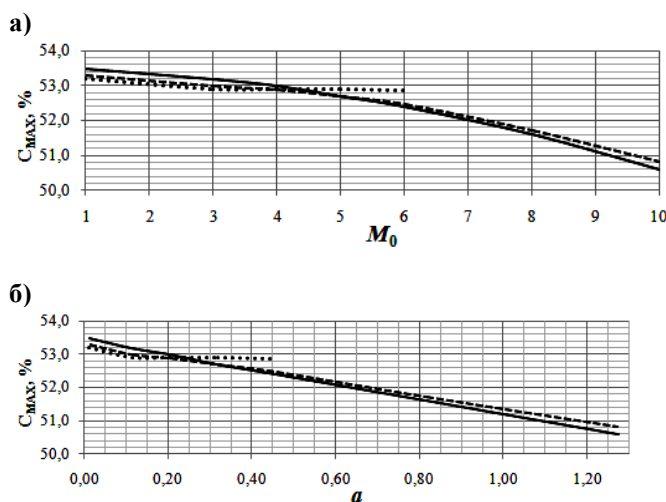


Рис. 5 – Значения  $C_{MAX}$  при  $K_{KC}=75$  при  $u=0$  в зависимости от: а)  $M_0$ ; б)  $a$

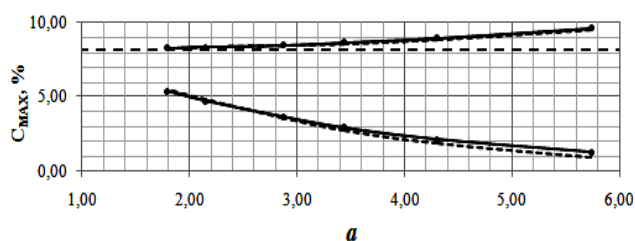


Рис. 6 – Значения  $C_{MAX}$  в зависимости от  $a$  при  $M_0=3$  и  $u=0$  до (нижние линии) и после корректировки (верхние)

При использовании неявной или смешанной схем (табл. 2 до корректировки; рис. 6 нижние линии) в области неустойчивости явной схемы (при  $a>0,75$ ) результаты эксперимента могут быть далеки от аналитического значения (табл. 2: верхние два блока – 8,15%; нижние два блока – 1,43%). Для снижения погрешности при  $0,75<a<5,0$  рассчитанные значения концентрации взвеси необходимо умножить на коэффициент:

неявная схема –

$$k_{НС}=(1-f)^k M_0 C_0 / \sum C_{k,m}; \quad (34)$$

смешанная схема –

$$k_{СС}=(1-0,5f)^k (1+0,5f)^{-k} M_0 C_0 / \sum C_{k,m}. \quad (35)$$

При  $a>5,0$  результаты расчётов могут содержать большую погрешность и после их корректировки.

На рис.6 верхние линии проведены по скорректированным данным по формулам (34) и (35), горизонтальная пунктирная линия – аналитическое значение ( $\approx 8,15\%$ ).

#### 4. ВЫВОДЫ

1. Численное моделирование распространения взвеси при производстве дноуглубительных работ при небольшом удалении контрольного створа (КС) от места выемки грунта целесообразно выполнять по явной конечно-разностной схеме.

2. Отклонение результатов эксперимента от аналитического решения (погрешность алгоритма расчёта) не будет превышать 5% при:  $K_{KC} \geq 75$ ;  $M_0 \leq 3$ ;  $(2a+f) \leq 0,96$ .

3. При большом удалении КС от точки выемки грунта, когда использование явной схемы затруднительно или не представляется возможным, численные эксперименты по неявной или смешанной схемам следует выполнять при:  $a \leq 5,0$ ;  $K_{KC} \geq 75$ ;  $M_0 \leq 3$ .

4. В области неустойчивости явной схемы (при  $0,75 \leq a \leq 5,0$ ) все рассчитанные значения концентрации взвеси необходимо откорректировать путём их умножения на коэффициент, рассчитываемый по формулам (34) или (35).

5. При  $a>5,0$  результаты расчёта и после корректировки могут иметь большую погрешность.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дампінг ґрунтів днопоглиблення: аналіз масштабів, економіко-екологічна оцінка, перспективи використання: монографія / Крупінець Л. С., Андреева Н. М., Брошкова Л. С. та ін. Одеса: ІПРЕЕД НАНУ, 2015. 108 с.
2. Прозоров А. А. Методика расчета зоны короткопериодного воздействия дампинга грунтов дноуглубления: автореф. дис. канд. физ.-мат. наук / Гос. морской проектный ин-т. Санкт Петербург, 2000. 19 с.
3. Гончаров А. А. Исследование и моделирование процесса распространения взвеси в морской среде при сбросе грунта: автореф. дис. канд. геогр. наук: спец. 11.00.08 «Океанология» / ГОИН. Москва, 1986. 24 с.
4. Котеров В. Н., Юрезанская Ю. С. Моделирование переноса взвешенных веществ на океаническом шельфе. Горизонтальное рассеяние. *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 2. С. 375–387.
5. Маслаков О. В. Аналіз результатів моделювання переносу домішок в ближній зоні відносно точкового джерела в шельфовій зоні моря. *Метеорологія, кліматологія та гідрологія*. 2005. № 49. С. 368–375.
6. Юрасов С. Н., Юрасова А. Ю. Математическая модель установившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке. *Вісник Одеського державного екологічного університету*. 2008. Вип. 6. С. 165-169.
7. Юрасов С. Н., Горун В. В., Берлинский Н. А. Верификация результатов моделирования распространения взвеси при дампинге грунта на морской подводный отвал. *Український гідрометеорологічний журнал*. 2015. № 16. С. 30-39.
8. Юрасов С. Н., Горун В. В. Применение конечно-

разностных схем при моделировании неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке. *Украинский гидрометеорологический журнал*. 2014. № 14. С. 172–184.

9. Калиниченко В. И., Юрасов С. Н., Горун В. В. Практическое использование математической модели неустановившейся турбулентной диффузии взвеси в водном потоке (МТП Керчь). *Вісник Одеського державного екологічного університету*. 2014. Вип. 18. С. 5–20.

## REFERENCES

1. Krupinets, L.Ie., Andreeva, N.M., Broshkova, L.S. et al. (2015). *Dampinh hruntiv dnopohlyblennia: analiz masshtabiv, ekonomiko-ekolohichna otsinka, perspektyvy vykorystannia [Dumping soils dredging: analysis scale, economical - ecological evaluation, prospects of using]*. Odesa: IPREED NANU. (in Ukr.)
2. Prozorov, A.A. (2000). *Metodika rascheta zony korotkoperiodnogo vozdeystviya dampinga gruntov dnouglubleniya [Method for calculating the short-period impact of dumping of dredging grounds]*. Abstract of Ph.D. Thesis. State Marine Design Institute Saint Petersburg. (in Russ.)
3. Goncharov, A.A. (1986). *Issledovanie i modelirovanie protsessa rasprostraneniya vzvesi v morskoy srede pri sbrose grunta [Research and modeling of the process of the suspension distribution in the marine environment during soil dumping]*. Abstract of Ph.D. Thesis. Oceanographic Institute. Moscow. (in Russ.)
4. Koterov, V.N. & Jurezanskaya, Ju.S. (2010). *Modelirovanie perenosa vzveshennykh veschestv na okeanicheskom shelfe. Gorizontalkoe rasseyanie [Modeling of the transport of suspended substances on the oceanic shelf. Horizontal*
5. Maslakov, O.V. (2005). *Analiz rezultativ modeliuvannia perenosu domishok v blyzhnii zoni vidnosno tochkovoho dzhherela v shelfovii zoni moria [Analysis of the results simulation of impurity transfer in the neighbor zone relatively pointwise sources in the shelf zone of the sea]*. *Meteorolohiia, klimatolohiia ta hidrolohiia [Meteorology, climatology and hydrology]*, 49, pp. 368-375. (in Ukr.)
6. Urasov, S.N. & Urasova, A.Ju. (2008). *[Mathematical model of steady-state turbulent diffusion of suspended solids in water flow]*. *Visnik Odes'kogo derzavnogo ekolohichnogo universitetu [Bulletin of Odessa state environmental university]*, 6, pp. 165-169. (in Russ.)
7. Urasov, S.N., Gorun, V.V. & Berlinskiy N.A. (2015). *[Verification of the results of modeling of the suspension distribution in the soil dumping on a marine submarine blast]*. *Ukrains'kij gidrometeorologichnij zhurnal [Ukrainian hydrometeorological journal]*, 16, <https://doi.org/10.31481/uhmj.16.2015.04>. (in Russ.)
8. Urasov, S.N. & Gorun, V.V. (2014). *[Application of finite-difference schemes in modeling of unsteady turbulent diffusion of a suspension in a water stream]*. *Ukrains'kij gidrometeorologichnij zhurnal [Ukrainian hydrometeorological journal]*, 14, pp. 172-184. (in Russ.)
9. Kalinichenko, V.I., Urasov, S.N. & Gorun V.V. (2014). *[Practical use of mathematical model of unsteady turbulent diffusion of a suspension in a water stream (MTP Kerch)]*. *Visnik Odes'kogo derzavnogo ekolohichnogo universitetu [Bulletin of Odessa state environmental university]*, 18, pp. 5-20. (in Russ.)

## RECOMMENDATIONS FOR NUMERICAL MODELLING OF SUSPENDED MATTER DISTRIBUTION DURING DREDGING WORKS

S. M. Yurasov, A. D. Komarenko

*Odessa State Environmental University,  
15 Lvivska str., 65016, Odesa, Ukraine, [urasen54@gmail.com](mailto:urasen54@gmail.com)*

The problem of estimating the distribution of suspended matter during dredging works is relevant due to the large volume of annual major and operational dredging activities in the ports of Ukraine constituting more than 4.5 million m<sup>3</sup> of soil. The execution of dredging works is associated with the inflow of suspended matter into the marine environment having a negative impact on the marine ecosystem. The magnitude of the inflicted damage depends on the characteristics of a zone of increased turbidity and a reliable assessment of such characteristics makes it possible to determine the actual damage to be indemnified according to the current environmental legislation.

The numerical modelling of the suspended matter distribution is the easiest way that may be used for evaluation of the characteristics of the zone of increased turbidity. The possibility of obtaining solutions on more general grounds in comparison with analytical methods, much less time and cash to be spent than for field experiments and modern computer software allowed widespread implementation of research methods of such modelling.

The article is devoted to the study of the numerical model of suspended matter distribution during dredging works. It considers explicit, implicit and mixed finite-difference schemes for



solving a stationary differential equation of turbulent suspended matter diffusion in the flat problem formulation. Several series of calculations have been performed for various model parameters based on which the obtained solutions have been analyzed, the assessment of the difference between the calculation results under different schemes has been done and the optimum parameters of the calculation grid have been proposed. The research presents some recommendations for numerical modelling of the suspended matter distribution in the water flow including: use of an explicit scheme; the number of jets in the excavated area should not exceed 3; the number of steps to the control opening – not less than 75; when using an implicit or mixed scheme it is necessary to introduce an adjustment in an unstable zone based on the total amount of matter accumulated into the opening until the final result is achieved.

**Key words:** stationary model; flat formulation; finite-difference scheme; turbulent diffusion; suspended matter.

## РЕКОМЕНДАЦІЇ ПО ЧИСЛОВОМУ МОДЕЛЮВАННЮ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗАВИСІ ПРИ ВИКОНАННІ ДНОПОГЛИБЛЮВАЛЬНИХ РОБІТ

С. М. Юрасов, А. Д. Комаренко

*Одеський державний екологічний університет,  
вул. Львівська, 15, 65016, Одеса, Україна, [urasen54@gmail.com](mailto:urasen54@gmail.com)*

Проблема оцінки поширення зависі при виконанні днопоглиблювальних робіт є актуальною через великий обсяг щорічного капітального і експлуатаційного днопоглиблення в портах України, яке становить більше ніж 4,5 млн. м<sup>3</sup> ґрунту. Виконання днопоглиблювальних робіт пов'язано з надходженням в морське середовище зависі, яка чинить сильний вплив на морські екосистеми. Масштаб шкоди, що завдається, залежить від характеристик зони підвищеної каламутності, достовірна оцінка цих характеристик дозволяє визначити реальний збиток, який за діючим природоохоронним законодавством повинен бути компенсований.

Характеристики зони підвищеної каламутності найпростіше отримати шляхом чисельного моделювання процесу розповсюдження зависі. Можливість отримання рішень на більш загальних підставах у порівнянні з аналітичними методами, набагато менші часові та грошові витрати, ніж при натурних експериментах, і сучасне комп'ютерне забезпечення дозволили широко впровадити в практику наукових досліджень методи цього моделювання.

Стаття присвячена дослідженню числової моделі розповсюдження зависі при виконанні днопоглиблювальних робіт. У ній розглянуті явна, неявна і змішана кінцево-різницева схеми рішення стаціонарного диференціального рівняння турбулентної дифузії зависі в плоскій постановці задачі. Виконано кілька серій розрахунків при різних параметрах моделі, проаналізовані отримані рішення, дано оцінку розбіжності результатів розрахунків за різними схемами і запропоновано оптимальні параметри розрахункової сітки. Наводяться рекомендації по числовому моделюванню розповсюдження зависі у водному потоці. Зокрема рекомендується: використовувати явну схему; кількість струменів в зоні виїмки ґрунту прийняти не більше 3; кількість кроків до контрольного створу – не менш 75; при використанні неявної або змішаної схеми до кінцевого результату в області нестійкості явної схеми необхідно вводити поправку з урахуванням загальної кількості речовини в створі.

**Ключові слова:** стаціонарна модель; плоска постановка; кінцево-різницева схема; турбулентна дифузія; завись.

*Подання до редакції : 15. 04. 2019  
Надходження остаточної версії : 13. 06. 2019  
Публікація статті : 28. 11. 2019*